PZT Actuator를 이용한 왜파모의 능동진동제어
Active Vibration Control of Cantilever Beams Using PZT Actuators

신 창 주*, 홍 진 숙†, 정 의 봉**

Changjoon Shin, Chinsuk Hong and Weui Bong Jeong

(2008년 9월 9일 접수 ; 2008년 11월 17일 심사완료)

Key Words: Active Vibration Control(능동진동제어), PZT Actuator(압전작동기), Cantilever Beam(왜파모), Velocity Feedback Control(속도 왜파입 제어), Plant Response(플랜트 응답), Stability(안정도), Total Kinetic Energy(전체운동에너지), Normalized Total Kinetic Energy(정규화된 전체운동에너지)

ABSTRACT

This paper presents an active vibration control of cantilever beams under disturbances by a primary force. A direct velocity feedback control using a pair of PZT actuator and a velocity sensor is considered. Variation of the stability and performance with the locations of the sensor/actuator pair is investigated. It is found that the maximum gain varies with the locations of the sensor/actuator pair significantly. The maximum gain shows a symmetric distribution along the beam length with respect to the center point, although the boundary condition of the beam is unsymmetric. The control performance is affected by the location of the primary force as well as the location of the sensor/actuator pair. The active control system can more effectively reduce the vibration when the primary force is located close to the fixed boundary.

1. 서 론

왜파모 구조물은 정착공구, 하드 디스크의 액세스 암, 비행기의 날개, 우주 정거장의 집량관 그리고 로봇 발등 여러 분야에 적용되어 있다(1~3). 왜파모는 자유단 부위에서 발생하는 큰 변위가구 구조물을 파손 할 수 있다는 단점을 가지고 있다. 특히 기병고 유연한 구조물이 저주파 진동에 놓여있을 때 치명적인 문제점(5)을 야기할 수 있다. 이러한 구조물들의 진동 저감을 위한 전통적인 방법은 구조물 재설계 또는 수동적으로 감쇠를 주는 것이다. 구조물 재설계는 많은 비용을 수반하게 된다. 반면 수동적으로 감쇠를 주는 것은 고주파 진동에 대해서 효과적이지만 저주파와 대역의 진동 저감에는 효율성이 현저하게 떨어진다. 이것은 대안으로 제어력을 이용한 능동진동제어(active vibration control : AVC)의 시급한 대응이 필요하다(6). 능동진동제어를 위해 쓰이는 대표적인 actuator로는 전자기 actuator와 PZT actuator가 있다. 전자기 actuator는 전음을 통해 제어력을 구조물에 전달한다. 전자기 actuator의 위치와 응답의 위치가 같을 때 무조건적 안정성을 가지게 되며 이로 인해 gain 을 자유자재로 조절할 수 있다(10). 하지만 전자기 actuator의 의형적인 특성상 무겁고 부피가 크다. 따라서 실제 적용 대상 분야가 매우 한정적이다. 반면 PZT actuator는 PZT의 가장자리를 통해 제어 모멘트를 얻고 구조물에 전달한다. 모멘트를 통한 구조물 제어의 경우 PZT가 구조물에 놓여있는 위치에 의해 불안정성 응답을 유발할 수 있다(9). 하지만 작

† 교신저자; 정회원, 부산대학교 기계공학부
E-mail : cshong@pusan.ac.kr
Tel : (051) 510-2494, Fax : (051) 517-3805

* 정회원, 부산대학교 대학원 기계공학부
** 정회원, 부산대학교 기계공학부
고 가바우며 큰 힘을 전달할 수 있기 때문에 실험적
인 적용범위가 매우 넓다. 따라서 PZT를 동정진동
체어에 적용하기 전에는 반드시 붓능성을 파악하
기 위한 연구가 선행되어야 한다.

PZT actuator를 이용한 동정진동체어 시스템의
안정성에 관한 다양한 연구 결과를 여러 문헌에서
 찾아볼 수 있다. 이는 동정진동체어의 경우
과 actuator의 동위차와 연구에서 동위차화된
PZT actuator와 가속도계는 액당고정도의 직접속도
의 실험적 적용 시 매우 안정하며 높은 제어성능을
처용할 수 있다고 밝혔다. 또한, 그는 다른 논문
에서 액당고정도의 다중점 직접속도체어시스템의
경우 저주파 대역에서는 안정성을 보이며 전주파 대역에
서 붓능성을 보일 수 있다고 하였다. 그러나 PZT
actuator와 가속도계를 이용한 직접속도 의목체어
시스템의 안정성은 실제 위치의 모드 전폭과 모드의
2차 미분 값의 곡에 의해 결정되며 이는 위치의 영
향을 받게 된다. 따라서 PZT actuator/가속도계
를 이용한 직접속도 의목체어 시스템의 안정성은
구조물의 경계조건 및 actuator/센서의 위치에 따른
영향을 통해 볼 때 열화된 것이 필요하며 제어계의 안
정성 측면에서 최적의 위치를 구할 수 있을 것이다.
Hong은 양단 탄성지지된 보에 대하여 PZT
actuator를 이용한 동정진동체어에 관한 연구에서 직접속
도체어 시스템의 안정성에 대하여 경계조건 및
actuator/센서의 위치에 관한 연구를 하였다. 그는
경계조건이 강화할수록, actuator/센서의 위치가 중
앙에 위치할수록 높은 안정성을 보장할 수 있음을
보였다. 특히 actuator/센서의 위치가 유연한 경계조
건에 놓일 때 안정성이 좋지 않을 가능성이 높음을
보였다.

PZT actuator를 이용한 속도의 이어에 적용하
여 외압되는 동정진동체어에 관한 문헌은 찾아보기
형들이다. 외압의 진동체어를 위해 FX-LMS를 이용
한 경우와 positive position feedback 제어를 이용한
경우는 있다. 직접속도의체어 제어 시스템을 적용하
였더라도 actuator가 전자기 actuator를 이용한 경우
와 PZT actuator/PZT 센서를 이용한 경우 및 여러
형태의 분포 PZT 센서를 활용한 경우 등으로
PZT actuator/가속도 센서를 이용하지 않았다.

이 연구에서는 PZT actuator/가속도 센서를 이용
하여 속도의체어 시스템을 외압에 적용한 동

PZT actuator의 위치가
안정성 및 성능에 미치는 영향을 고찰하였다. 일정
하중으로 모델링된 외압의 위치에 따른 성능의 변화
도 고찰하였다. 2절에서는 외압의 지배 방정식과
입력 하중 및 PZT actuator에 의한 모멘트로 인한
응답에 대하여 수학적 모델을 설명하였다. 이를
직접속도의체어 시스템의 구성과 수학적 모델을
설명하였다. 3절에서는 PZT actuator/가속도 센서의
위치가 직접속도의체어 시스템의 안정성에 미치
는 영향을 고찰하고 최적의 위치를 구하였다. 4절에
서는 PZT actuator/가속도 센서의 위치 및 외압의
위치가 제어 성능에 미치는 영향을 고찰하였다. 마
지막으로 5절에서 결론을 정리하였다.

2. 정식화

2.1 지배방정식

 Hindi 모멘트가 동시에 일어나는 균일 외압는
Fig. 1과 같이 표현할 수 있으며 Euler-Bernoulli
beam의 운동방정식을 이용하여 식(1)과 같이 나타
낼 수 있다.

\[ E(1+\mu)\frac{\partial^4\omega(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \]

여기서 \( E \)는 Young의, \( \mu \)는 구조 감쇠, \( f \)는 보 단면
의 판성모멘트, \( \rho \)는 밀도, \( A \)는 보의 단면적, \( T \)는
단위 길이당 외력 그리고 \( T \)는 단위 길이당 모멘트
이다. 보의 속도에 대한 주파수 응답 함수는 식(2)
와 같다.

\[ v(x,w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w) \phi_n(x) \]

Fig. 1 A cantilever beam subjected to external forces
and moments along the beam
여기서 \( a_n \)은 주파수별 모달 속도응답이며 \( \phi_n \)은 모드 형상이다. 모달 속도응답은 식 (3)과 같다.

\[
a_n = A_n(\omega) F_n(\omega),
\]

(3)

식 (3)에서

\[
F_n(\omega) = \int_0^L f(x,\omega) \phi_n(x) dx + \int_0^L \frac{\partial T(x,\omega)}{\partial x} \phi_n(x) dx
\]

(4)

여기서 \( \phi_n(x) \)는 외판보의 모드형상으로 식 (5)과 같다^{(9)}.

\[
\phi_n(x) = \left( \cosh \frac{\lambda_n x}{L} - \cos \frac{\lambda_n x}{L} \right)
- \frac{L}{\lambda_n} \left( \sinh \frac{\lambda_n x}{L} - \sin \frac{\lambda_n x}{L} \right)
\]

(5)

여기서 \( \lambda_n = \cos \lambda_n \cosh \lambda_n = -1 \)의 근으로 주어진다.

또 식 (3)에서

\[
A_n(\omega) = \frac{j \omega}{\rho AL(\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega_n \omega)},
\]

(5)

여기서

\[
\zeta_n = \frac{\omega_n}{2\omega}, \quad \omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}
\]

(7)

이 연구에 고려할 외판과 PZT actuator에 의한 제어모멘트는 각각 집중하중과 모멘트이다. 외판
인 집중하중은 \( x = x_p \) 위치에 크기가 \( f_p \)로 식 (8)과 같이 쓸 수 있다.

\[
f(x,t) = f_p \delta(x - x_p),
\]

(8)

PZT actuator에 의한 모멘트 쌍은 \( x = x_s \)를 중심으로 양쪽으로 \( S \)만큼 벌어져 서로 반대방향으로 작
용하며 그 크기가 \( T_s \)로 식 (9)과 같이 표현된다.

\[
T(x,t) = T_s \{ \delta(x - (x_s - s)) - \delta(x - (x_s + s)) \}
\]

(9)

식 (8)과 식 (9)를 식 (4)에 대입하고 그 결과를 식 (3)에 대입하면

\[
a_n = A_n \left[ f_p \phi_n(x_p) + T_s \left( \frac{\partial \phi_n(x_s - s)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n(x_s + s)}{\partial x} \right) \right]
\]

(10)

이러한 외부 속도에 대한 주파수응답률 수치 \( \Lambda \)까지 일반화하면 식 (11)과 같다.

\[
v(x,\omega) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\omega) \phi_n(x) = a^T \phi(x),
\]

(11)

\[
a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T,
\]

(12)

\[
\phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)]^T
\]

(13)

여기서 \( a \)는 모달 속도 벡터, \( \phi \)는 모드 형상 벡터이다.

식 (11)에 의하여 진동하는 구조물의 total kinetic energy는 정규화된 모드벡터에의 직교성을 이용하면 식 (14)와 같다.

\[
E(\omega) = \frac{\rho A}{2L} a^H a
\]

(14)

여기서 \( \phi \)는 Hermitian conjugate를 나타낸다.

2.2 속도 되먹임 제어

이 연구에서는 동등진동체를 위하여 Fig. 2에서 보이는 바와 같이 속도 되먹임 제어 루프(loop)를 구
성하였다^{(6)}.

외판으로써 집중하중 \( f_p \)와 제어 모멘트

\( T_s \)가 동시에 가해질 때 센서 위치에서 구조물의 속
도 응답 \( v_r \)은 식 (15)와 같이 표현된다.

\[
v_r(x_r,\omega) = Y_{pr}(j\omega) f_p + Y_{sr}(j\omega) T_s \{ \delta(x - x_s2) - \delta(x - x_s1) \}
\]

(15)

\[
Y_{pr}(j\omega) = \sum_{n=1}^{N} A_n(j\omega) \phi_n(x_p) \phi_n(x_r)
\]

(16)

\[
Y_{sr}(j\omega) = \sum_{n=1}^{N} A_n(j\omega) \left( \frac{\partial \phi_n(x_s1)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n(x_s2)}{\partial x} \right) \phi_n(x_r)
\]

(17)
이면 \( x_r = x_s, \; x_{s1} = x_s - s, \; x_{s2} = x_s + s \)이다.

외판에 의한 센서의 출력을 \( d(j\omega) = Y_{pr}f_p \), plant의 전달함수를 \( G(j\omega) = Y_{s1}(j\omega) \)로 표현하면 식(15)는 식(18)과 같이 쓸 수 있다.

\[
v_r = d(j\omega) + G(j\omega) T_s \tag{18}\]

Block diagram에 의해 \( T_s = -\nu_r(j\omega)H(j\omega) \)이며, 여기서 \( H(j\omega) \)는 feedback gain이다. Gain의 상수라면 \( H(j\omega) = h \)이므로 제어 모멘트는 식(19)와 같이 표현된다.

\[
T_s = \frac{-h Y_{pr}(j\omega)f_p}{1 + h Y_{pr}(j\omega)} \tag{19}\]

식(14)에 주어진 total kinetic energy는 feedback gain \( h \)의 함수이므로 \( E(\omega, h) \)로 표현한다. \( E(\omega, h) \)의 주파수에 대한 적분 값을 특정 비교 대상의 total kinetic energy의 적분 값에 대한 비로 나타내는 값을 normalized total kinetic energy로 지칭한다. 이는 식(20)과 같이 나타낼 수 있다.

\[
\bar{K}_E(h) = 10\log_{10} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} s(t, h) dt}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} s_b^2(t) dt} \tag{20}\]

여기서 \( E_p \)는 특정 비교대상의 total kinetic energy이며 이 연구에서는 제어 전 구조물의 total kinetic energy로 적용하였다.

3. Plant response 및 안정성

외판보 구조물에 대하여 PZT actuator와 속도센서를 이용한 속도 되먹임 제어기의 안정성을 해석하기 위해 식(17)에서 보인 plant response를 계산하였다. 이때 센서의 위치는 Fig.2에서 보인 바와 같이 PZT actuator의 중점 위치를 설정하였다. 외판보 구조물에 적용된 물성치는 Table 1에서 보인 바와 같다. 센서 및 PZT actuator의 위치가 안정성에 미치는 영향을 고찰하기 위해 센서/PZT actuator를 보의 고정단으로부터 전체 길이의 10%, 20%, 50%, 80% 위치에 대하여 plant response를 구하였다.
Fig.3은 PZT actuator의 각 위치에 대한 plant response를 Nyquist diagram으로 나타내었다. 좌변면에서 존재하는 응답은 불안정성을 야기하는 모드이며 실수축을 교차하는 최대값의 역수가 plant의 안정성을 확인할 수 있는 gain이 된다. PZT actuator의 위치가 고정단 및 자유단에 가까운수록 불안정한 모드가 많아지고 최대 gain은 중앙으로 갈수록 낮아짐을 알 수 있다. PZT actuator 위치에 따른 최대 gain의 변화를 알아보기 위해 PZT actuator를 구조물의 전체 길이 대비 고정단에서부터 2~98%까지 2%씩 이동

<table>
<thead>
<tr>
<th>Table 1 Geometric data and material properties of beams</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Parameters</td>
</tr>
<tr>
<td>---------------</td>
</tr>
<tr>
<td>Length</td>
</tr>
<tr>
<td>Width</td>
</tr>
<tr>
<td>Thickness</td>
</tr>
<tr>
<td>Density</td>
</tr>
<tr>
<td>Young's modulus</td>
</tr>
<tr>
<td>Poisson's ratio</td>
</tr>
<tr>
<td>Loss factor</td>
</tr>
</tbody>
</table>
PZT Actuator를 이용한 외발보의 능동진동제어

하며 각 위치에서 최대 gain을 구하였다. Fig. 4에서 보인 바와 같이 구조물의 제어 안정성을 보장하는 최대 gain은 50% 지점을 중심으로 좌우 대칭적인 모습을 나타내고 있다. 또한 18%, 82% 지점에서 가장 높은 최대 gain을 확보할 수 있었고 50% 지점에서 가장 높았다. 이 결과는 양단 탄성 지지된 보에 대한 기존의 연구 결과와 비교했을 때 최대 이동의 공간적 분포에 대한 영향에 큰 차이를 보이고 있다. 양단 탄성 지지된 경우 지지점의 강성에 따른 하게 PZT actuator/가속도 센서가 보의 중앙점에 놓일 때 가장 높은 최대 이동을 얻을 수 있었다. 구조물의 경계조건은 비대칭인 반면 최대 gain이 보의 중심 위치에 대하여 대칭적으로 나타난다. 왜냐하면 PZT actuator가 생성하는 모멘트 삼각 모드와 연관되는 특성 때문이다. 외발보 구조물의 전달함수 식 (17)에서 PZT의 크기 2g가 외발보 상에 존재하는 파장보다 매우 작다고 가정하면 모멘트 차는 미분 형태로 표현할 수 있으며 식 (21)과 같이 쓸 수 있다.

\[ Y_{sr}(j\omega) = G(j\omega) = -2g \sum_{n=1}^{N} A_n(j\omega) \phi_n(x_r) \frac{\partial^2 \phi_n(x_r)}{\partial x^2} \]  

(21)

\[ A_n(j\omega)\]의 위상이 항상 ±90° 내에 존재하므로 모드형상과 모드형상의 이차미분의 값이 plant response의 안정성을 결정하게 된다. 식 (21)에 의하면 모드형상과 모드형상의 이차미분 값이 음수이면 안정하고, 양수이면 불안정을 야기하게 된다. Fig. 5는 모드형상, 모드형상의 이차미분, 모드형상과 모드형상의 이차 미분 값을 보여주고 있다. 모드형상과 모드형상의 이차 미분 값의 그래프에서 고정단과 자유단 가장자리 부분에서 안정성을 심각하게 해칠 수 있는 양의 값이 외발보의 중심을 기준으로 대칭적으로 나타난다.

Fig. 3 Nyquist diagram of frequency response functions(0~2 kHz) between the velocity sensor and moment pair with space of 4%L on cantilever beams : (a) at 0.1L, (b) at 0.2L, (c) at 0.5L, and (d) at 0.8L
4. 성능분석

4.1 제어력 위치 변화와 영향

Fig. 6은 PZT actuator의 위치별 gain에 대한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 의란은 1N의 집중하중을 20% 지점에 가해하였으며, PZT actuator 위치는 고정단으로부터 보의 길이에 대하여 2%부터 98%까지 2% 간격으로 변경하였다. Fig. 4에서 보인 바와 같이 최대 gain을 획득할 수 있는 PZT actuator의 위치가 18% 및 82%인 반면 normalized total kinetic energy를 최소화 하는 PZT actuator 위치는 32% 및 68% 지점으로 나타났다. 이는 PZT actuator의 위치에 따라 고주파 대역 모드와 제어모멘트의 연성되는 정도가 차이나기 때문인 것으로 판단된다. Fig. 3에서 보인 Nyquist diagram을 보면 PZT actuator 위치가 증가함으로 갈수록 고주파 대역 응답이 크게 나타남을 알 수 있다. 그러나 이 경우 저주파 대역의 불안정 모드의 응답도 크게 나타나므로 최대 gain을 얻을 수 있는 18% 지점과 중앙점 사이인 32% 지점에서 가장 우수한 성능을 보인 것으로 판단된다. 이때 진동 저감의 크기는 5.7 dB였다. Fig. 7은 PZT actuator가 보에 대해 18% 및 32% 지점에 설치되었을 때의 total kinetic energy를 보이고 있다. PZT actuator 가 보의 길이에 대하여 18%, 32% 지점에 설치하였을 때 1차, 2차 모드는 두 경우 모두 거의 변화가 없는 반면 다른 여타 모드의 경우 PZT actuator가 보의 길이에 대하여 32% 지점에 설치된 경우 18% 지점에 비하여 더 좋은 진동저감 성능을 보이고 있다.

양단 탄성 지지된 보에 대한 연구(13)에서 PZT
Fig. 8 Effect of the locations of primary forces at 10%L, 20%L, 50%L and 80%L on the normalized control performances of direct velocity feedback control systems with a secondary moment pair

Fig. 9 Effect of the locations of primary forces from 2%L to 98%L by 2%L on the normalized control performances of direct velocity feedback control systems with a secondary moment pair

actuator/가속도 센서의 위치에 따른 성능해석 결과에서는 그 위치가 보의 긴이의 25%에서 75%이하이면 양호한 성능을 보였다. 그러나 외판도의 경우는 양단 저지점 및 자유단 근처와 중앙부 모두 제어 성능이 좋지 않고 약 32% 근처에서만 양호한 제어 성능을 보장할 수 있었다.

4.2 외판 위치 변화의 영향
외판은 1N의 질중하중을 적용하였으며 입력위치 ($x_p$)는 보의 길이에 대하여 10%, 20%, 50% 그리고 80%로 설정하였다. PZT actuator의 위치($x_p$)는 최적의 PZT actuator로 확정된 32% 지점에 고정시켰다. Fig.8은 외판 입력위치를 변화시켰을 때 gain에 의한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 이를 통하여 외판의 입력위치가 자유단에 가까울수록 동적응용제어가 되지 않는 것을 확인할 수 있다. 반면 PZT actuator의 위치를 변경하더라도 외판의 입력위치가 고정단에 가까운 10%일 경우 진동 저감 효과가 높게 나타난다. 이 결과를 통하여 외판의 입력위치가 고정단에 가까울수록 진동저감 효과가 높을 것으로 유추할 수 있다. Fig.9는 외판의 위치에 대한 gain에 대한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 외판의 입력 위치는 고정단으로부터 보의 길이에 대하여 2%부터 98%까지 2% 간격으로 설정하였으며 PZT actuator는 32% 지점에 고정하였다. 외판의 입력 위치가 고정단으로부터 자유단 방향으로 이동함수록 진동저감 효과가 떨어지는 것을 확인할 수 있다. Normalized total kinetic energy가 최소가 되는 외판의 위치는 2% 지점이었으며 진동저감 크기는 PZT actuator의 위치가 32%의 경우 6.5 dB로 계산되었다. 이것을 통하여 외판의 위치가 고정단에 가까울수록 동적응용제어를 통한 진동저감효과가 뛰어나지만 외판의 위치가 자유단에 가까이 위치할수록 동적응용제어를 통한 진동저감효과가 불가능하다는 것을 알 수 있다.

5. 결론
이 연구에서는 PZT actuator를 이용하여 외판도의 동적응용제어를 적용하였다. 이를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) PZT actuator의 위치에 따른 안정성을 해석한 결과 경계조건이 보의 중심점($x = L/2$)을 기준으로 비대칭이나 PZT actuator의 위치에 따라 최대 gain의 포기는 대칭으로 나타났다. 최대 gain은 PZT actuator의 위치가 보 전체길이의 18% 또는 82%인 지점일 때 약 8이었다. 그러나 PZT actuator를 이 위치에 설치했을 때 최대성을 얻을 수 있었다.

(2) 제어 성능은 외판의 위치에 따라 급격히 변한다. 외판의 위치가 자유단에 가까이 위치할 경우 PZT actuator의 위치에 상관없이 제어성을 얻을 수 없다. 이는 외판의 위치가 자유단 가까이에 위치할 경우 저차모드와 연장이 매우 크게 이어지지만 PZT actuator는 저차모드에서 불안정 특성을 보여 저차모드에서 억제가 과도하게 일어나기 때문이다.

(3) 외판도에 직접속도저역입력제어를 적용했을 때 최대 성능을 얻기 위해서는 외판도 고정단 근처에
위치하고 PZT actuator는 0.32L(또는 0.64L)에 있 으면 일정한 위치가 될 수 있었다.

(4) PZT actuator를 이용하여 직접속도예측법을 제 어를 완화해 진동억제를 위해 접속할 경우 외관력의 위치를 가능한 한 고정한 것으로 이용할 수 있는 방 안을 모색하여야 하고 PZT actuator의 위치는 보 길이의 32% 근처에 위치하도록 구성하여야 한다.

후 기

이 연구는 교육과학기술부와 한국산업기술재단의 지역혁신인력양성사업 및 기계공학부 부설 기금의 지원을 받아 수행된 결과이며 이에 감사드립니다.

참고 문헌


(14) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes, Krieger.